数学Ⅱ・数学B

問　題	選択方法
第1問	必　　答
第2問	必　　答
第3問	いずれか2問を選択し，解答しなさい。
第4問	
第5問	
第6問	

第１問 （必答問題） （配点　30）

〔1〕 座標平面上の３点

$$\mathrm{A}(-1,\ 0),\ \mathrm{B}(\cos\theta,\ \sin\theta),\ \mathrm{C}(\cos 2\theta,\ \sin 2\theta)$$

について，θ が $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ の範囲を動くとき

$$d = \mathrm{AC} + \mathrm{BC}$$

の最大値と最小値を求めよう。

(1)

$$\mathrm{AC}^2 = \boxed{\text{ア}} + 2\cos 2\theta$$

$$= \boxed{\text{イ}}\cos^2\theta$$

$$\mathrm{BC}^2 = \boxed{\text{ウ}} - 2\cos\theta$$

$$= \boxed{\text{エ}}\sin^2\frac{\theta}{2}$$

であるから

$$d = \boxed{\text{オ}}\,|\cos\theta| + \boxed{\text{カ}}\sin\frac{\theta}{2}$$

である。

（数学Ⅱ・数学B第１問は次ページに続く。）

(2)　$t = \sin\frac{\theta}{2}$ とおく。

$0° \leqq \theta \leqq 90°$ のとき

$0 \leqq t \leqq \frac{\sqrt{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{ク}}}$ であり，$d = -\boxed{\text{ケ}}\,t^2 + \boxed{\text{コ}}\,t + 2$ である。

$90° \leqq \theta \leqq 180°$ のとき

$\frac{\sqrt{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{ク}}} \leqq t \leqq 1$ であり，$d = \boxed{\text{ケ}}\,t^2 + \boxed{\text{コ}}\,t - 2$ である。

したがって，d は $t = \frac{\sqrt{\boxed{\text{サ}}}}{\boxed{\text{シ}}}$ のとき最小値 $\sqrt{\boxed{\text{ス}}}$ をとり，このときの θ の値は $\boxed{\text{セソ}}°$ である。また，d は $t = \boxed{\text{タ}}$ のとき最大値 $\boxed{\text{チ}}$ をとり，このときの θ の値は $\boxed{\text{ツテト}}°$ である。

（数学Ⅱ・数学B第1問は次ページに続く。）

〔2〕 x，y，z は正の数で $2^x=\left(\frac{5}{2}\right)^y=3^z$ を満たしているとする。このとき

$$a=2x,\ b=\frac{5}{2}y,\ c=3z$$

とおき，a，b，c の大小関係を調べよう。

(1) $x=y\left(\log_2\boxed{\text{ナ}}-\boxed{\text{ニ}}\right)$ であるから

$$b-a=y\left(\frac{\boxed{\text{ヌ}}}{2}-2\log_2\boxed{\text{ナ}}\right)$$

である。したがって，a と b を比べると $\boxed{\text{ネ}}$ の方が大きい。

(2) $x=z\log_2\boxed{\text{ノ}}$ であるから

$$c-a=z\left(3-2\log_2\boxed{\text{ノ}}\right)$$

である。したがって，a と c を比べると $\boxed{\text{ハ}}$ の方が大きい。

(3) $3^5<\left(\frac{5}{2}\right)^6$ であることを用いると，a，b，c の間には大小関係

$$\boxed{\text{ヒ}}<\boxed{\text{フ}}<\boxed{\text{ヘ}}$$

が成り立つことがわかる。

第２問 （必答問題） （配点　30）

a を定数とし，放物線

$$y = x^2 + 2ax - a^3 - 2a^2$$

を C，その頂点をPとする。

(1)　頂点Pの座標は

$$\left(\boxed{\text{アイ}},\ -a^{\boxed{\text{ウ}}} - \boxed{\text{エ}}\,a^2 \right)$$

である。したがって，どのような定数 a についても，頂点Pは

$$y = x^{\boxed{\text{オ}}} - \boxed{\text{カ}}\,x^2$$

のグラフ上にある。

(2)　a が $-3 \leqq a < 1$ の範囲を動くとする。頂点Pの y 座標の値が最大となるのは $a = \boxed{\text{キ}}$ と $a = \boxed{\text{クケ}}$ のときであり，最小となるのは $a = \boxed{\text{コサ}}$ のときである。

(3)　a の値を(2)で求めた $\boxed{\text{キ}}$，$\boxed{\text{クケ}}$，$\boxed{\text{コサ}}$ とするときの放物線 C をそれぞれ C_1，C_2，C_3 とする。放物線 C_2，C_3 の方程式は

$$C_2 : y = x^2 - \boxed{\text{シ}}\,x + \boxed{\text{ス}}$$

$$C_3 : y = x^2 - \boxed{\text{セ}}\,x$$

である。

（数学Ⅱ・数学B第２問は次ページに続く。）

このとき

C_1 と C_2 の交点の x 座標は $\dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{2}$

C_1 と C_3 の交点の x 座標は $\boxed{\text{タ}}$

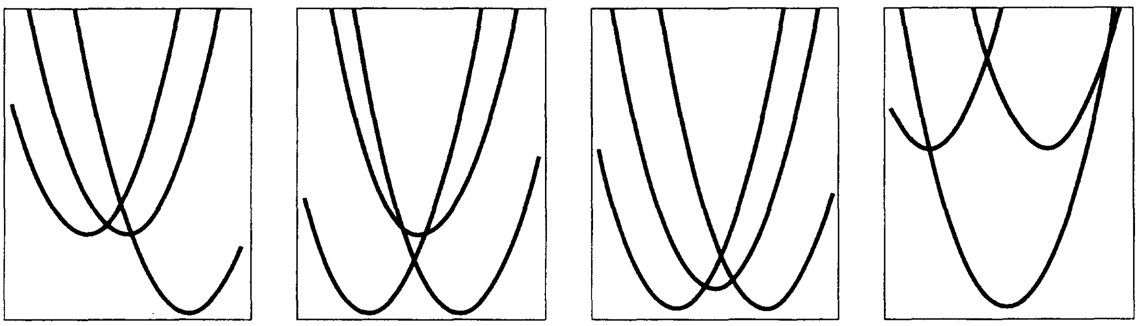
C_2 と C_3 の交点の x 座標は $\dfrac{\boxed{\text{チ}}}{2}$

である。

(4) C_1, C_2, C_3 を座標平面上に図示したとき，それらの位置関係を表す最も適当なものは，下の図⓪～③のうち $\boxed{\text{ツ}}$ である。ただし，座標軸や曲線名は省略してある。

三つの放物線 C_1, C_2, C_3 で囲まれた図形の面積は $\dfrac{\boxed{\text{テト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$ である。

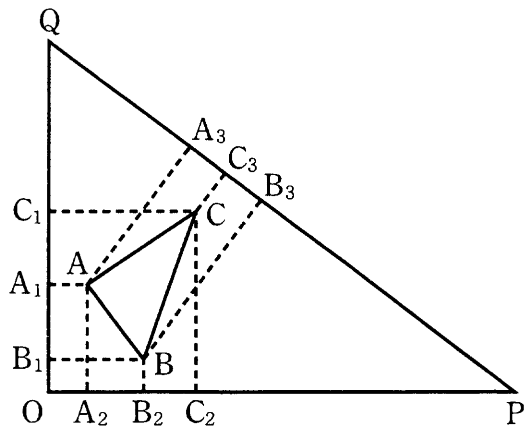
⓪　①　②　③



第3問 (選択問題) (配点 20)

座標平面上の3点O(0, 0), P(4, 0), Q(0, 3)を頂点とする三角形OPQの内部に三角形ABCがあるとする。A, B, Cから直線OQに引いた垂線とOQとの交点をそれぞれA_1, B_1, C_1とする。A, B, Cから直線OPに引いた垂線とOPとの交点をそれぞれA_2, B_2, C_2とする。A, B, Cから直線PQに引いた垂線とPQとの交点をそれぞれA_3, B_3, C_3とする。

A_1が線分B_1C_1の中点であり, B_2が線分A_2C_2の中点であり, C_3が線分A_3B_3の中点であるとする。



(数学Ⅱ・数学B第3問は次ページに続く。)

$\overrightarrow{AB}=(x,\ y)$, $\overrightarrow{AC}=(z,\ w)$とおく。$A_1$が線分$B_1C_1$の中点であるから$w=\boxed{\text{ア}}\,y$である。$B_2$が線分$A_2C_2$の中点であるから$z=\boxed{\text{イ}}\,x$である。線分ABの中点をDとすると，$C_3$が線分$A_3B_3$の中点であるから

$$\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{PQ}=\boxed{\text{ウ}}$$

である。また

$$\overrightarrow{PQ}=\left(\boxed{\text{エオ}},\ \boxed{\text{カ}}\right),\quad \overrightarrow{CD}=\frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}\left(\overrightarrow{AB}-\boxed{\text{ケ}}\,\overrightarrow{AC}\right)$$

であるから

$$y=\frac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シ}}}\,x$$

である。したがって

$$\overrightarrow{AB}=x\left(1,\ \frac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シ}}}\right),\quad \overrightarrow{AC}=x\left(\boxed{\text{イ}},\ \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}\right)$$

である。ゆえに

$$AC=\frac{\boxed{\text{ソ}}\sqrt{\boxed{\text{タチ}}}}{\boxed{\text{ツ}}}AB,\quad \cos\angle BAC=\frac{\sqrt{\boxed{\text{テト}}}}{\boxed{\text{ナニ}}}$$

である。

第4問 (選択問題) (配点 20)

二つの複素数 p, q と三つの異なる複素数 α, β, γ は

$$\alpha+\beta+\gamma=0 \qquad \cdots\cdots① $$

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=p \qquad \cdots\cdots② $$

$$\alpha\beta\gamma=q \qquad \cdots\cdots③ $$

を満たすとする。複素数 α, β, γ が複素数平面上で表す点をそれぞれA, B, Cとし，三角形ABCは，AB = ACの直角二等辺三角形であるとする。

このとき

$$\arg\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\pm\boxed{\text{アイ}}^\circ,\quad \left|\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right|=\boxed{\text{ウ}}$$

である。ここで，複素数 z の偏角 $\arg z$ は $-180^\circ \leqq \arg z < 180^\circ$ を満たすとする。

以下 $\arg\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\boxed{\text{アイ}}^\circ$ であるとする。このとき，①を用いると

$$\beta=\frac{\boxed{\text{エオ}}+\boxed{\text{カ}}\,i}{\boxed{\text{キ}}}\alpha,\quad \gamma=\frac{\boxed{\text{クケ}}-\boxed{\text{コ}}\,i}{\boxed{\text{サ}}}\alpha$$

である。

(数学Ⅱ・数学B第4問は次ページに続く。)

さらに，②，③から

$$p=\frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}\alpha^{\boxed{\text{セ}}},\quad q=\frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}\alpha^{\boxed{\text{チ}}}$$

である。したがって，p と q は

$$\boxed{\text{ツテ}}\,p^{\boxed{\text{ト}}}=\boxed{\text{ナニ}}\,q^{\boxed{\text{ヌ}}}$$

を満たさなければならない。

さらに，複素数平面上に点Dがあり，四角形ABDCが正方形であるとき，Dを表す複素数は $\boxed{\text{ネノ}}\,\alpha$ である。

第5問 （選択問題）（配点　20）

さいころを最大5回まで投げ，目の出方に応じてポイントを得る次のゲームをDさんがおこなう。Dさんは最初 a ポイントをもっている。

さいころを投げて，5または6の目が出る事象を A とする。事象 A が初めて起こった時点では1ポイントを得て引き続きゲームを続行し，2度目に事象 A が起これば2ポイントが加算されて合計3ポイントを得て，その時点でゲームを終了する。なお，さいころを5回投げても，事象 A が一度しか起こらない場合には，1度目に得た1ポイントのままで終了する。もし5回投げても事象 A が一度も起こらない場合には，あらかじめ定めた m ポイントが減点されて終了する。ただし，a と m は自然数で，$a \geqq m$ とする。

このゲームが終了した時点でのDさんのもつポイント数を確率変数 X とする。

(1)　$X = a + 1$ となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{243}$ である。

(2)　ちょうど4回目でゲームが終了する確率は $\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エオ}}}$ であり，終了する時点が4回目または5回目となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{カキ}}}{\boxed{\text{クケ}}}$ である。

（数学Ⅱ・数学B第5問は次ページに続く。）

(3)　3 回目までに一度も事象 A が起こらない確率は $\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サシ}}}$ である。

また，3 回目までに一度も事象 A が起こらないとき，$X > a$ となる条件付き確率は $\dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$ である。

(4)　確率変数 X の平均(期待値)は

$$E(X) = a + \frac{\boxed{\text{ソタチ}} - \boxed{\text{ツテ}}\, m}{243}$$

で，$E(X) > a$ となるような最大の自然数 m は $\boxed{\text{トナ}}$ である。

第6問 (選択問題) (配点 20)

ある銀行では毎期末に預金残高に対し5%の利率で利息がつく。この銀行に，たとえばa万円を一期間預金すると，期末には$1.05 \times a$万円の預金残高になることになる。

第1期の初めに，Aさんはこの銀行にb万円の預金を持っている。Aさんは，まずb万円から第1期分m万円を引き出す。残りの預金に対し第1期末に5%の利息がつく。ここで，$b > m$とする。第2期目からも毎期初めにこの預金からm万円ずつを引き出す予定である。ただし，預金残高がm万円に満たないときには，その全額を引き出すものとする。

以下の問題中，INT(X)はXを越えない最大の整数を表す関数である。

(1) 預金残高が0円になるのに何期間を要するかを調べるため，次の〔プログラム1〕を作った。このプログラムでは，自然数bとmを与えるとき，第n期初めに預金を引き出した直後に預金残高が0円になれば，そのときの自然数nを出力する。

〔プログラム1〕

```
100 INPUT "B=";B
110 INPUT "M=";M
120 N=0
130 N=N+1
140 B=1.05*(B-M)
150 IF B>0 THEN GOTO [アイウ]
160 PRINT N
170 END
```

このプログラムの空欄 $\boxed{\text{アイウ}}$ をうめて，プログラムを完成せよ。

(2) このプログラムの160行を変更して，最終期の引き出し金額の1万円未満を切り捨てたものも出力するようにするには，160行を $\boxed{\text{エ}}$ と変更すればよい。ただし，この金額の単位は万円とする。また，$\boxed{\text{エ}}$ については，当てはまるものを，次の⓪～⑤から一つ選べ。

⓪ PRINT N, INT(B)
① PRINT N, INT(B+M)
② PRINT N, INT(B-M)
③ PRINT N, INT(1.05*B)
④ PRINT N, INT(B/1.05+M)
⑤ PRINT N, INT(B/1.05-M)

(数学Ⅱ・数学B第6問は次ページに続く。)

(3) 第1期初めの預金額を2150万円，引き出し額を100万円とすると，第1期末の預金残高は，約2152万円となり，第1期初めの2150万円より増える。

一般に，毎期の初めに m 万円引き出すものとし，第 n 期末の預金残高を c_n 万円とする。このとき，$c_{n+1}=1.05(c_n-m)$ であるので

$$c_{n+1}-c_n=1.05(c_n-c_{n-1}),\quad n=1,\ 2,\ \cdots$$

が成り立つ。ただし，$c_0=2150$ とする。

よって，$c_1-c_0\geqq 0$ ならば，預金残高は減少しないことがわかる。ここで，c_1 は m と c_0 によって決まり，$c_1-c_0\geqq 0$ を満たす最大の自然数 m は $\boxed{\text{オカキ}}$ である。

(4) 次に，Aさんの預金残高が n 期間にわたり0円にならないために必要な第1期初めの預金額 b 万円を計算するため，次の〔プログラム2〕を作った。このプログラムでは，自然数 n と m を与えるとき，預金残高が n 期間にわたり0円にならないために必要な第1期初めの預金額 b 万円を計算する。ただし，$n\geqq 2$ とする。

〔プログラム2〕

```
100 INPUT "N=";N
110 INPUT "M=";M
120 I=N
130 B=M
140 B=B/1.05+M
150 I=I-1
160 IF I>1 THEN GOTO [クケコ]
170 PRINT [サ]
180 END
```

このプログラムの空欄 $\boxed{\text{クケコ}}$ と $\boxed{\text{サ}}$ をうめて，このプログラムを完成せよ。ただし，$\boxed{\text{サ}}$ については，当てはまるものを，次の⓪～④から一つ選べ。

⓪ INT(B)　① INT(B/1.05)　② INT(B/1.05+1)
③ INT(B+1)　④ INT((B+1)/1.05)

このプログラムを実行して N=? に対し 3，M=? に対し 90 を入力したとき，170 行において $\boxed{\text{シスセ}}$ と出力される。このとき，140 行は $\boxed{\text{ソ}}$ 回実行される。